ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

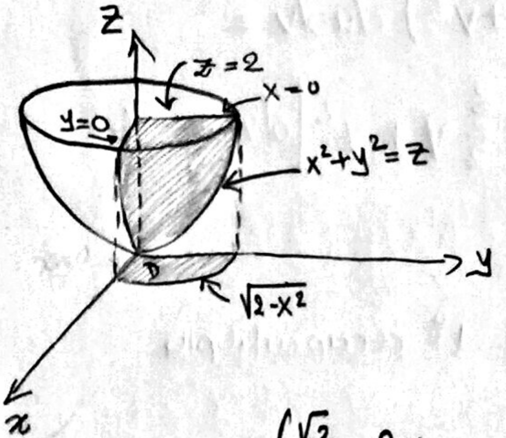
1) Εστω W το χωρίο που φράσσεται από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=2$ και την επιφάνεια $z=x^2+y^2$, $x,y\geq 0$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_W x\,dx\,dy\,dz.$$

ΛΥΣΗ

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\leq z\leq 2,\ 0\leq y\leq\sqrt{2-x^2}\quad 0\leq x\leq\sqrt{2}\}$$



$$\int_W x\,dx\,dy\,dz=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2)\,dy\,dx=$$

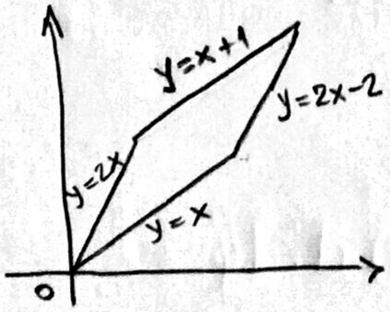
$$=\int_0^{\sqrt{2}} x\cdot\left((2-x^2)^{3/2}-\frac{(2-x^2)^{3/2}}{3}\right)dx=$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2x}{3}\cdot(2-x^2)^{3/2}\,dx=\left.\frac{-2(2-x^2)^{5/2}}{15}\right|_0^{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{15}$$

2) Εσω το παραλληλόγραμμα το οποίο φράσσεται απο τις ευθείες $y=2x$, $y=2x-2$, $y=x$ και $y=x+1$. Να υπολογισετε το $\int_P xy\,dx\,dy$ οπου P: το δοθεν παραλληλογραμμο κανοντας των εξής αλλαγή μεταβλητων:

$x=u-v$ και $y=2u-v$ (δηλ. $T(u,v)=(u-v,2u-v)$)

ΛΥΣΗ



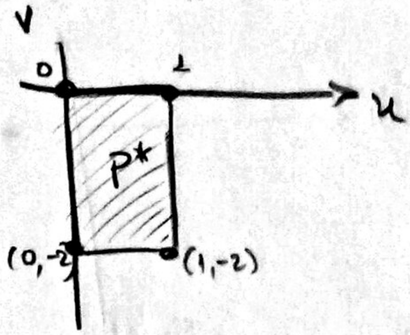
ο μετασχηματισμός T 1-1 „ (προφανές εξ ορισμου)

$$D_T(u,v)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\rightsquigarrow \det D_T(u,v)=1$$

Από Θ. αλλ. μεταβλητής:

$$\int_P x\cdot y\,dx\,dy=\int_{P^*}(u-v)\cdot(2u-v)\,du\,dv \quad (1)$$

P^*: Είναι ορθογώνιο όπου ορίζεται από τις ευθείες $v=0$, $v=-2$, $u=0$ και $u=1$ επί του P στο νέο σύστημα συντεταγμένων με άξονες u, v



(στην ουσία απλουστεύουμε το πεδίο ολοκλήρωσης και υπολογίζουμε πιο εύκολα το εμβαδόν του χωρίου P που στην ουσία είναι ισοδύναμο με το εμβαδόν του P^*)

(1): $$\int_{P^*}(u-v)(2u-v)\,du\,dv = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{1}(2u^2-3uv+v^2)\,du\,dv =$$

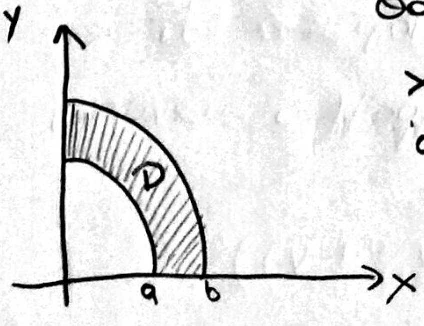
$$= \int_{-2}^{0}\left(\frac{2}{3}u^3 - \frac{3u^2 \cdot v}{2} + v^2 \cdot u\right)\Big|_0^1 dv = \int_{-2}^{0}\left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2}v + v^2\right]dv = 7$$

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$\int_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy$, όπου D το χωρίο στο 1^o τεταρτημόριο που περιβάλλεται από τα τόξα των κύκλων:

$x^2+y^2=a^2$ και $x^2+y^2=b^2$ (όπου $0<a<b$).

ΛΥΣΗ



Θα κάνουμε τη χρήση πολικών συντεταγμένων:

$x = r\cos\varphi$ & $y = r\cdot\sin\varphi \rightsquigarrow r^2 = x^2+y^2$

όπου $g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$Dg(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \partial/\partial r\, g_1 & \partial/\partial\varphi\, g_1 \\ \partial/\partial r\, g_2 & \partial/\partial\varphi\, g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow \det Dg(r,\varphi) = r.$

Άρα, από Θ. αλλαγ. μεταβλητής

$$\int_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{D^*}\log r^2 \cdot \det Dg(r,\varphi)\,dr\,d\varphi =$$

$= \int_{D^*} r\cdot\log r^2\,dr\,d\varphi$ (1), D^*: ορθογώνιο σε πολικές

Επομένως, η (1) είναι:

$$\int_{D^*} r\cdot\log r^2\,dr\,d\varphi = \int_a^b\int_0^{\pi/2} r\cdot\log r^2\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\cdot\int_a^b r\cdot\log r^2\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left(b^2\cdot\log b - a^2\cdot\log a - \frac{1}{2}(b^2-a^2)\right)$$

4) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_D e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\,d(x,y,z)$$ με D η μοναδιαία σφαίρα

ΛΥΣΗ

$D=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1\}$

Προφανώς θα κάνουμε αλλαγή μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες ώστε:

$0\le\rho\le 1,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\varphi\le\pi$ (*)

$$\int_D \underbrace{e^{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}}_{=g(x,y,z)}\,d(x,y,z) = \int_{D^*} e^{\sqrt{\rho^3}}\cdot|\det Dg(r,\theta,\varphi)|\,d(r,\theta,\varphi)$$

$$= \int_{D^*} e^{\sqrt{r^3}}\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi \quad (1),$$ D^*: Το χωρίο που ορίζεται από το (*).

$$(1): \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{r^3}\cdot r^2\cdot\sin\phi\,d\theta\,d\phi\,dr = 2\pi\int_0^1\int_0^\pi e^{\rho^3}\cdot\rho^2\cdot\sin\varphi\,d\varphi\,dr$$

$$= -2\pi\int_0^1 r^2\cdot e^{r^3}\cdot[\cos\varphi]_0^\pi\,dr = 4\pi\int_0^1 e^{r^3}\cdot r^2\cdot dr = \frac{4}{3}\pi(e-1)$$

5) Να υπολογιστή το ολοκλήρωμα

$$\int_S \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad , \quad S: \left\{ \begin{array}{l} \text{το στερεό που περιβάλλεται} \\ \text{από τις δυο σφαίρες :} \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \ \& \ x^2+y^2+z^2=b^2 \\ \text{με } 0<b<a . \end{array} \right\}$$

ΛΥΣΗ

Αφήνεται ως εφαρμογή για το σπίτι.
λύνεται όπως η άσκηση (3) αλλά μέσω σφαιρικών συντεταγμένων. (Αποτέλεσμα: $4\pi \cdot \log\left(\frac{a}{b}\right)$)